МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

А. В. Семенов, И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий, А. С. Трепалин

КАК ПОЛУЧИТЬ МАКСИМАЛЬНЫЙ БАЛЛ НА ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

Решение заданий повышенного и высокого уровня сложности

Москва
Издательство «Интеллект-Центр»
2023

УДК 373.167.1:51(075.3)
ББК 22.1я721
М34

Под общей редакцией научного руководителя Центра педагогического мастерства Ященко И.В.

Рецензент:

А.А. Прокофьев – доктор педагогических наук, заведующий кафедрой «Высшей математики – 1» НИУ МИЭТ

Семенов А.В.
М34 Математика. Решение заданий повышенного и высокого уровня сложности. Как получить максимальный балл на ЕГЭ. Учебное пособие. / А.В. Семенов, И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, А.С. Трепалин; Московский Центр непрерывного математического образования. – Москва: Издательство «Интеллект-Центр», 2023. – 192 с.

ISBN 978-5-907528-89-5

В предлагаемом учебном пособии даны основные типы заданий повышенного и высокого уровня сложности, используемых на ЕГЭ по математике. Особое внимание уделяется разбору заданий, вызвавших наибольшие затруднения. Для тренировки и самоподготовки к ЕГЭ предлагаются задания с развёрнутым ответом различного уровня сложности по всем содержательным блокам.

Пособие адресовано старшеклассникам, преподавателям и родителям. Оно поможет школьникам проверить свои знания и умения по предмету, а учителям – оценить степень достижения требований образовательных стандартов отдельными учащимися и обеспечить их целенаправленную подготовку к экзамену.

Пособие прошло научно-методическую оценку ФГБНУ «ФИПИ».

УДК 373.167.1:51(075.3)
ББК 22.1я721

Генеральный директор
М.Б. Миндюк

Редактор Д.П. Локтионов
Художественный редактор Е.Ю. Воробьева
Компьютерная верстка и макет: Е.В. Лукьянова

Подписано в печать 14.12.2022 г. Формат 60x84⅛. Бумага типографская.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 24,0. Тираж 3000 экз.
Заказ №

ООО «Издательство «Интеллект-Центр»
125445, Москва, ул. Смольная, д. 24А, этаж 6, ком. 24

ISBN 978-5-907528-89-5

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Математика. Решение заданий повышенного и высокого уровня сложности. Как получить максимальный балл на ЕГЭ» адресовано старшеклассникам с целью повторения, закрепления, систематизации, проверки знаний по алгебре и началам математического анализа и геометрии. В пособии представлены задания с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровня сложности второй части единого государственного экзамена по математике. Эти задания предназначены, прежде всего, для будущих студентов технических, экономических, математических и других вузов, предъявляющих повышенные требования к уровню математической подготовки абитуриентов.

Содержание заданий с развёрнутым ответом контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена соответствует спецификации экзамена по математике, опубликованной на сайте Федерального института педагогических измерений (https://fipi.ru) в разделе «ЕГЭ: демоверсии, спецификации, кодификаторы». В рамках спецификации экзамена по математике профильного уровня продолжается расширение тематики задач. Указанные изменения нашли свое отражения в книге, которую вы держите в руках.

В пособии даны не только задания, которые были на экзаменах и в диагностических работах в прошлые годы, а есть задания подготовительного характера. Каждому заданию КИМ ЕГЭ посвящена отдельная глава (по количеству заданий второй части экзамена по математике профильного уровня). По тематике каждая глава разбита на параграфы. В конце каждого параграфа есть раздел «Задания для самостоятельного решения». В некоторых параграфах раздел «Задания для самостоятельного решения» усилен дополнительным разделом «Тренировочная работа», который тематически охватывает задания параграфа.

В книге семь глав. Уравнениям повышенного уровня сложности (показательным, логарифмическим, тригонометрическим) посвящена первая глава. Вторая глава содержит задания по неравенствам (рациональным, показательным, логарифмическим, системам этих неравенств). В третьей главе собраны текстовые задачи с экономическим содержанием (кредиты, вклады, оптимальный выбор). В четвёртой главе собраны задания высокого уровня – задания с параметром. Планиметрические геометрические задания повышенного уровня собраны в пятой главе. Стереометрическим геометрическим заданиям посвящена шестая глава. В геометрических задачах обратите внимание на пункты, связанные с доказательством какого-либо геометрического факта. Арифметические и алгебраические задания повышенного и высокого уровня сложности собраны в седьмой главе.

В каждой главе задания распределены по параграфам. В каждом параграфе сначала даются задания с решениями (краткими), а потом задания для самостоятельной работы, к которым также даны краткие ответы. Ни в коем случае приведённые решения не претендуют на роль эталона – эти решения даны в очень сжатом виде. Очень часто приведённые решения придётся читателю «расшифровывать», дополняя промежуточными преобразованиями, вычислениями и логическими обоснованиями, в этих решениях часто лишь обозначены основные этапы решения задачи. Математические задания могут быть решены с использованием разных подходов и методов. На экзамене проверяется математическая грамотность решения участника экзамена. При подготовке к экзамену с использованием этого пособия авторы рекомендуют сначала попробовать решить задачу, к которой написано решение, самостоятельно, а потом уже знакомиться с решением, данным в книге. После рассмотрения заданий с решениями параграфа обязательно нужно решать задания для самостоятельной работы.

При решении заданий повышенного уровня сложности нужно учитывать, что решение обязательно должно быть доведено до ответа – только в этом случае можно рассчитывать на какие-то баллы. В заданиях высокого уровня сложности баллы могут быть выставлены лишь за законченный фрагмент решения. При решении заданий нужно учитывать, что на экзамене нет калькулятора, поэтому в подготовительной работе особо нужно уделять внимание вычислениям без калькулятора.

Пособие соответствует содержанию курса математики профильного уровня средней школы и может помочь выпускникам школ в подготовке к Единому государственному экзамену. Гарантией успешной сдачи экзамена является систематическое изучение математики в школе и самостоятельная работа, включающую в себя вдумчивое решение математических задач.

В пособии использованы задачи, предложенные А.Р. Рязановским, П.В. Семёновым, В.С. Панфёровым, И.Н. Сергеевым, И.Р. Высоцким, М.Я. Пратусевичем, С.А. Шестаковым, О.Н. Косухиным, А.В. Семеновым, В.А. Смирновым, А.В. Хачатуряном, Р.К. Гординым, А.И. Суздальцевым, Д.А. Фёдоровых, М.А. Волчкевичем.

Авторы благодарны Д.Б. Житницкому, Ю.О. Пукасу, Л.А. Титовой, В.Ю. Шапариной за помощь при подготовке книги к печати.

1. УРАВНЕНИЯ

1.1. Тригонометрические уравнения

1. а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right].$

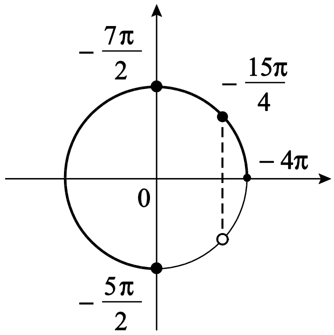
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2\cos^2 x - 1 - \sqrt{2}\cos x + 1 = 0;\ \ 2\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x = 0;\ \ \cos x\cdot\left(2\cos x - \sqrt{2}\right) = 0.$$

Значит, или $\cos x = 0,$ откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z},$ или $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},$ или $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right].$



Получим числа: $-\frac{15\pi}{4}, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}.$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ -\frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z};$

б) $-\frac{15\pi}{4}, -\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}.$

2. а) Решите уравнение $2\sqrt{3}\sin^2\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) + \sin 2x = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right].$

Решение.

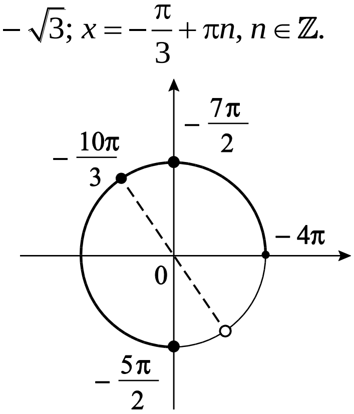
а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2\sqrt{3}\cos^2 x + 2\sin x\cdot\cos x = 0;\ \ \cos x\cdot\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) = 0.$$

Значит,

$$\cos x = 0,\ \ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z},\ \text{или}\ \sin x = -\sqrt{3}\cos x;\ \ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3};\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right].$



Получим числа: $-\frac{7\pi}{2}, -\frac{10\pi}{3}, -\frac{5\pi}{2}.$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};$

б) $-\frac{7\pi}{2}, -\frac{10\pi}{3}, -\frac{5\pi}{2}.$

3. а) Решите уравнение $\sin^2 x - 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos 2x = 1.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right].$

Решение.

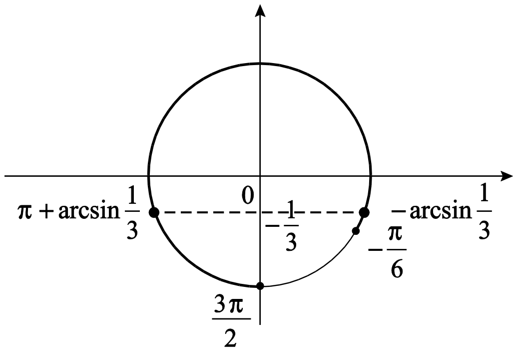
а) Преобразуем исходное уравнение:

$$\sin^2 x - 5\sin x - \left(1 - 2\sin^2 x\right) = 1;\ \ 3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0.$$

Пусть $\sin x = t,$ где t принадлежит $[-1; 1],$ тогда уравнение принимает вид $3t^2 - 5t - 2 = 0.$ Получаем, что либо $t = -\frac{1}{3},$ либо $t = 2$ – противоречит тому, что $t \in [-1; 1].$

Получаем: $\sin x = -\frac{1}{3}$, откуда $x = -\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z},$ или $x = \pi + \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right].$



Получим числа: $-\arcsin\frac{1}{3},\ \pi + \arcsin\frac{1}{3}.$

Ответ: а) $-\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z};$

$\pi + \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$

б) $-\arcsin\frac{1}{3},\ \pi + \arcsin\frac{1}{3}.$

4. а) Решите уравнение $4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi].$

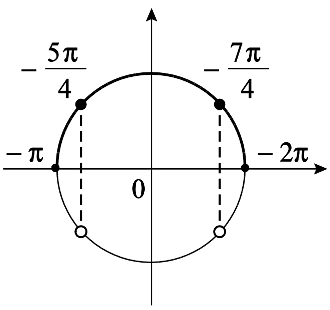
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 = 0; 2\cos^2 x = 1; \cos^2 x = \frac{1}{2},$$

откуда $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ или $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, значит, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi].$



Получим числа: $-\frac{7\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}.$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z};$

б) $-\frac{7\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}.$

5. а) Решите уравнение $4\sin^4 x - 3\cos^2 x + 2 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right].$

Решение.

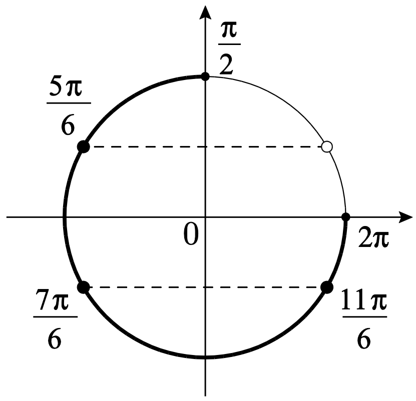
а) Преобразуем исходное уравнение:

$$4\sin^4 x-3\left(1-\sin^2 x\right)+2=0;\ \ 4\sin^4 x+3\sin^2 x-1=0.$$

Пусть $\sin^2 x=t,$ где $t\ge 0,$ тогда уравнение принимает вид $4t^2+3t-1=0.$ Получаем, что либо $t=\frac{1}{4},$ либо $t=-1$ – противоречит тому, что $t\ge 0.$

Получаем: $\sin^2 x=\frac{1}{4},$ $\sin x=\pm\frac{1}{2},$ откуда $x=-\frac{\pi}{6}+\pi k,$ $k\in\mathbb{Z},$ или $x=\frac{\pi}{6}+\pi n,$ $n\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\,2\pi\right].$



Получим числа: $\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}$ и $\frac{11\pi}{6}.$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6}+\pi k,$ $k\in\mathbb{Z};$ $\frac{\pi}{6}+\pi n,$ $n\in\mathbb{Z};$

б) $\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}.$

6. а) Решите уравнение $\frac{5\cos x+4}{4\operatorname{tg} x-3}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\,-\frac{5\pi}{2}\right].$

Решение.

а) Решим уравнение:

$$\frac{5\cos x+4}{4\operatorname{tg} x-3}=0;\ \ \begin{cases}\cos x=-\frac{4}{5},\\ \operatorname{tg} x\ne\frac{3}{4}.\end{cases}$$

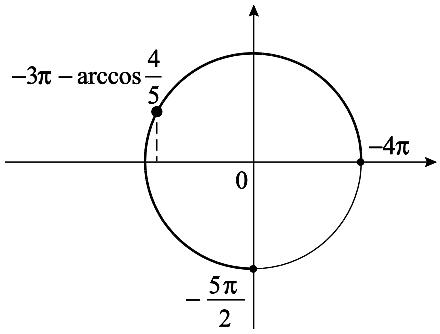
Из уравнения $\cos x=-\frac{4}{5}$ получаем, что $x=\pi-\arccos\frac{4}{5}+2\pi n,$ $n\in\mathbb{Z},$ или $x=\pi+\arccos\frac{4}{5}+2\pi k,$ $k\in\mathbb{Z}.$

Пусть $\varphi=\arccos\frac{4}{5}$, тогда $\cos\varphi=\frac{4}{5}$ и $\varphi\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, значит, $\sin\varphi=\frac{3}{5}$, то есть $\operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{4}$. Следовательно, $\operatorname{tg}\left(\pi+\arccos\frac{4}{5}+2\pi k\right)=\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{4}{5}\right)=\operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{4}$, чего быть не должно.

$$\operatorname{tg}\left(\pi-\arccos\frac{4}{5}+2\pi n\right)=\operatorname{tg}\left(-\arccos\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{4}\ne\frac{3}{4}.$$

Получаем решение исходного уравнения: $x=\pi-\arccos\frac{4}{5}+2\pi n,\,n\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.



Получим число $-3\pi - \arccos\frac{4}{5}$.

Ответ: а) $\pi - \arccos\frac{4}{5} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;

б) $-3\pi - \arccos\frac{4}{5}$.

7. а) Решите уравнение $\frac{5}{\cos^2\left(\frac{13\pi}{2} - x\right)} + \frac{7}{\sin x} - 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение: $\frac{5}{\sin^2 x} + \frac{7}{\sin x} - 6 = 0$.

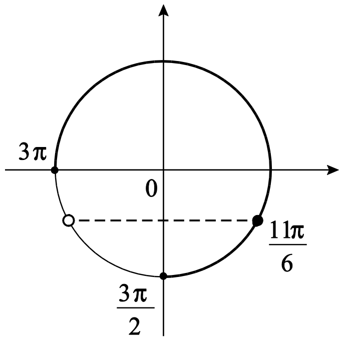
Пусть $t = \frac{1}{\sin x}$, тогда уравнение примет вид:

$$5t^2 + 7t - 6 = 0;\ (5t-3)(t+2) = 0,\ \text{откуда}\ t = \frac{3}{5}\ \text{или}\ t = -2.$$

При $t = \frac{3}{5}$ получаем, что $\sin x = \frac{5}{3}$ – нет корней.

При $t = -2$ получаем, что $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.



Получим число $\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},\ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{11\pi}{6}$.

8. а) Решите уравнение $2\operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} + 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение

$$2\operatorname{tg}^2 x + \frac{5}{\cos x} + 4 = 0;\ \frac{2 - 2\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{5}{\cos x} + 4 = 0.$$

Пусть $t=\cos x$, тогда уравнение примет вид:

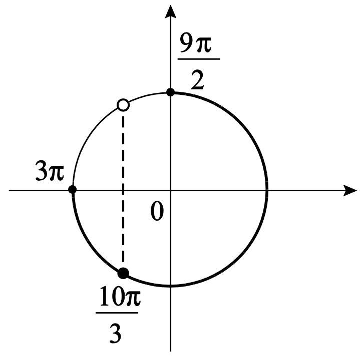
$$\frac{2-2t^2}{t^2}+\frac{5}{t}+4=0;\quad \frac{2t^2+5t+2}{t^2}=0;\quad \frac{(2t+1)(t+2)}{t^2}=0,$$

откуда $t=-\frac{1}{2}$ или $t=-2$.

При $t=-2$ получаем, что $\cos x=-2$ – нет корней.

При $t=-\frac{1}{2}$ получаем, что $\cos x=-\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$.



Получим число $\frac{10\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$

б) $\frac{10\pi}{3}$.

9. а) Решите уравнение $\left(2\sin x-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{-\cos x}+1\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

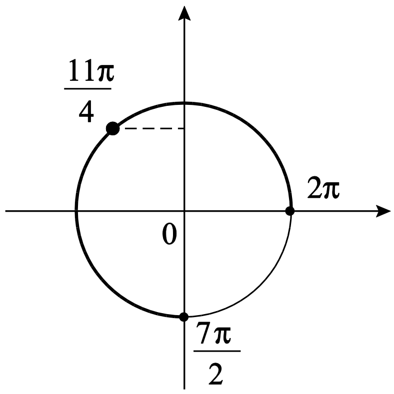
Решение.

а) Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sqrt{-\cos x}=-1,\end{array}\right.\\ \cos x\le 0;\end{cases}\quad \begin{cases}\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos x\le 0,\end{cases}$$

откуда $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.



Получим число $\frac{11\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$

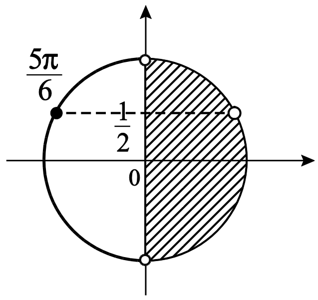
б) $\frac{11\pi}{4}$.

10. а) Решите уравнение $\dfrac{8\sin^2 x-14\sin x+5}{\sqrt{-6\cos x}}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2};-3\pi\right].$

Решение.

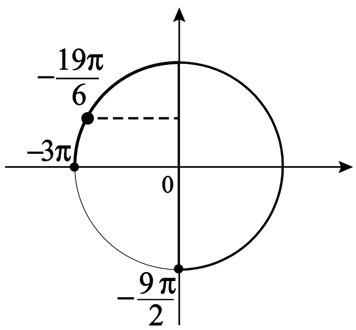
а) $\dfrac{8\sin^2 x-14\sin x+5}{\sqrt{-6\cos x}}=0;$ $\begin{cases}8\sin^2 x-14\sin x+5=0,\\ \cos x<0;\end{cases}$



$\begin{cases}(4\sin x-5)(2\sin x-1)=0,\\ \cos x<0,\end{cases}$ откуда или $\begin{cases}\sin x=\dfrac{5}{4},\\ \cos x<0,\end{cases}$ нет корней,

или $\begin{cases}\sin x=\dfrac{1}{2},\\ \cos x<0,\end{cases}$ $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9\pi}{2};-3\pi\right].$



Получим число $-\dfrac{19\pi}{6}.$

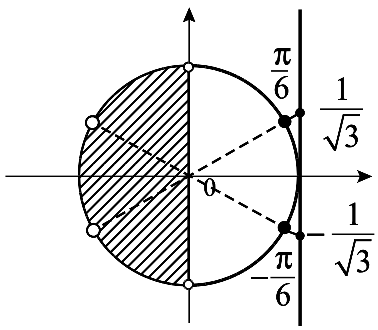
Ответ: а) $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$

б) $-\dfrac{19\pi}{6}.$

11. а) Решите уравнение $\dfrac{3\operatorname{tg}^2 x-1}{\sqrt{7\cos x}}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};4\pi\right].$

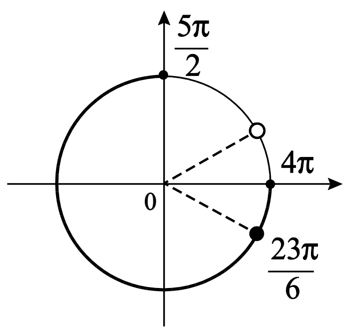
Решение.



а) $\dfrac{3\operatorname{tg}^2 x-1}{\sqrt{7\cos x}}=0;$ $\begin{cases}3\operatorname{tg}^2 x-1=0,\\ \cos x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}\operatorname{tg} x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\\ \cos x>0,\end{cases}$

откуда $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ или $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};4\pi\right].$



Получим число $\dfrac{23\pi}{6}.$

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$ $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$

б) $\dfrac{23\pi}{6}$.

12. а) Решите уравнение $5\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 1\right].$

Решение.

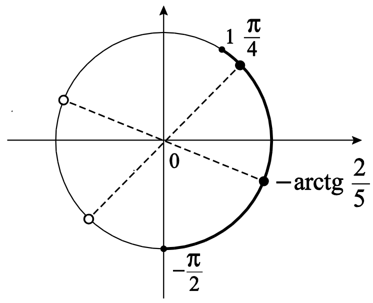
а) Если $\cos x = 0,$ то тогда и $\sin x = 0,$ что одновременно невозможно.

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0.$ Получаем:

$$5\cdot\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 3\cdot\frac{\sin x}{\cos x} - 2 = 0;\ \ 5\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Пусть $\operatorname{tg} x = t,$ тогда уравнение принимает вид $5t^2 - 3t - 2 = 0,$ получаем: $t = -\frac{2}{5},$ $\operatorname{tg} x = -\frac{2}{5},$ откуда $x = -\operatorname{arctg}\frac{2}{5} + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z},$ или $t = 1,$ $\operatorname{tg} x = 1,$ откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 1\right],$ учитывая, что $\frac{\pi}{4} < \frac{4}{4} = 1.$



Получим числа: $-\operatorname{arctg}\frac{2}{5},$ $\frac{\pi}{4}.$

Ответ: а) $-\operatorname{arctg}\frac{2}{5} + \pi k,$ $k \in \mathbb{Z};$ $\frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z};$

б) $-\operatorname{arctg}\frac{2}{5},$ $\frac{\pi}{4}.$

13. а) Решите уравнение $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2} = \sin^2 3x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right].$

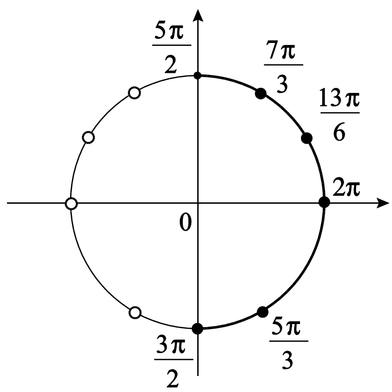
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$\sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{x}{2}\right) = \sin^2 3x;\ \ \sin^2 3x - \sin 3x = 0;\ \ \sin 3x(\sin 3x - 1) = 0;\ \ \sin 3x = 0,\ \ 3x = \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z},$$

откуда $x = \frac{\pi k}{3},$ $k \in \mathbb{Z},$ или $\sin 3x = 1,$ $3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$ откуда $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right].$



Получим числа: $\frac{3\pi}{2},$ $\frac{5\pi}{3},$ $2\pi,$ $\frac{13\pi}{6},$ $\frac{7\pi}{3}.$

Ответ: а) $\frac{\pi k}{3},$ $k \in \mathbb{Z};$ $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},$ $n \in \mathbb{Z};$

б) $\frac{3\pi}{2},$ $\frac{5\pi}{3},$ $2\pi,$ $\frac{13\pi}{6},$ $\frac{7\pi}{3}.$

14. а) Решите уравнение $\left(\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-4\cos^3 2x\right)\sqrt{\operatorname{tg} 2x}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right].$

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\left(\cos 2x-4\cos^3 2x\right)\sqrt{\operatorname{tg} 2x}=0;\quad \cos 2x\left(1-4\cos^2 2x\right)\sqrt{\operatorname{tg} 2x}=0;$$

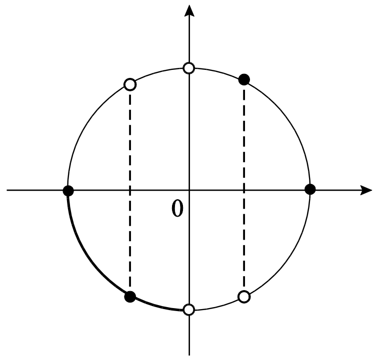
$$\cos 2x\left(1-2\cos 2x\right)\left(1+2\cos 2x\right)\sqrt{\operatorname{tg} 2x}=0.$$

Пусть $t=2x,$ тогда уравнение принимает вид

$$\cos t\left(1-2\cos t\right)\left(1+2\cos t\right)\sqrt{\operatorname{tg} t}=0.$$

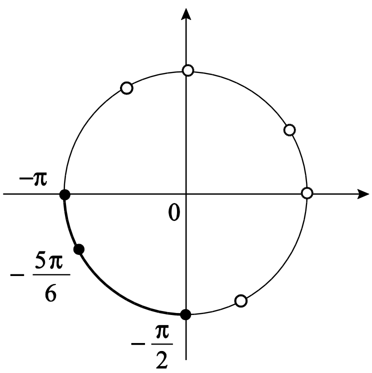
Это уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos t=0,\\ \cos t=\pm\frac{1}{2},\\ \operatorname{tg} t=0,\end{array}\right.\\ \operatorname{tg} t\geq 0;\end{cases}\qquad \left[\begin{array}{l}t=\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ t=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}2x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ 2x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\end{array}\right.$$



$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z},\\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;-\frac{\pi}{2}\right].$



Получим числа: $-\pi,\ -\frac{5\pi}{6},\ -\frac{\pi}{2}.$

Ответ: а) $\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z};$

б) $-\pi,\ -\frac{5\pi}{6},\ -\frac{\pi}{2}.$

Задания для самостоятельного решения

1. а) Решите уравнение $\cos 2x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right].$

2. а) Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\sin 2x=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right].$

3. а) Решите уравнение $\sin^2 x-9\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)+3\cos 2x=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{3};\,2\pi\right].$

4. а) Решите уравнение $16\cos^4 x-24\cos^2 x+9=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi;\,3\pi].$

5. а) Решите уравнение $12\cos^4 x+5\sin^2 x-8=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\,\pi\right].$

6. а) Решите уравнение $\frac{5\operatorname{tg} x-12}{13\cos x-5}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi;\,\frac{11\pi}{2}\right].$

7. а) Решите уравнение $\frac{5}{\sin^2 x}-\frac{9}{\cos\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)}+4=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right].$

8. а) Решите уравнение $4\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)}+1=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\,3\pi\right].$

9. а) Решите уравнение $(2\cos x+1)\left(\sqrt{-\sin x}+1\right)=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2};-4\pi\right].$

10. а) Решите уравнение $\dfrac{6\sin^2 x-5\sin x-4}{\sqrt{-2\cos x}}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right].$

11. а) Решите уравнение $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x-3}{\sqrt{3\sin x}}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};-\pi\right].$

12. а) Решите уравнение $4\sin^2 x+\sin x\cos x-3\cos^2 x=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1;\dfrac{\pi}{2}\right].$

13. а) Решите уравнение $\sin\dfrac{5x}{2}\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{5x}{2}\cos\dfrac{x}{2}=\cos^2 3x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;-2\pi].$

14. а) Решите уравнение $\left(\sin\left(4x-\dfrac{5\pi}{2}\right)+2\cos^3 4x\right)\sqrt{\operatorname{tg} 4x}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right].$